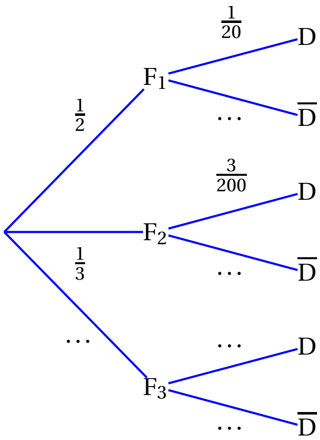
Corrigé du baccalauréat S Asie 16 juin 2009

Exercice 1 **5 points**

1. **a.** On a : $p\left(\text{F}_1\right) = \dfrac{1}{2}$; $p\left(\text{F}_2\right) = \dfrac{1}{3}$. Puis :

$p_{\text{F}_1}(D) = \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{20}$; $p_{\text{F}_2}(D) = \dfrac{1,5}{100} = \dfrac{15}{1000}\dfrac{3}{200}$; $p(D) = \dfrac{3,5}{100} = \dfrac{35}{1000} = \dfrac{7}{200}$.



b. Cette probabilité est égale à $p\left(\text{F}_1\right) \times p_{\text{F}_1}(D) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{40} = \dfrac{5}{200}$.

c. De la même façon cette probabilité est égale à (troisième branche) à $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{200} = \dfrac{1}{200}$.

d. On a $p\left(\text{F}_3\right) = 1 - p\left(\text{F}_1\right) - p\left(\text{F}_2\right) = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

D'autre part $p(D) = \dfrac{7}{200} = p\left(\text{F}_1\right) \times p_{\text{F}_1}(\text{D}) + p\left(\text{F}_2\right) \times p_{\text{F}_2}(\text{D}) + p\left(\text{F}_3\right) \times p_{\text{F}_3}(\text{D}) \iff \dfrac{7}{200} = \dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{200} + \dfrac{1}{6}p_{\text{F}_3}(\text{D}) \iff p_{\text{F}_3}(\text{D}) = 6\left[\dfrac{7}{200} - \dfrac{1}{40} - \dfrac{1}{200}\right] = 6\left[\dfrac{6}{200} - \dfrac{1}{40}\right] = 6\left[\dfrac{6}{200} - \dfrac{5}{200}\right] = \dfrac{6}{200} = \dfrac{3}{100}$.

On a donc $p\left(\text{F}_3 \cap \text{D}\right) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3}{100} = \dfrac{1}{200}$.

e. On a $p_{\text{F}_3}(\text{D}) = \dfrac{p\left(\text{F}_3 \cap \text{D}\right)}{p\left(\text{F}_3\right)} = \dfrac{\frac{1}{200}}{\frac{1}{6}} = \dfrac{6}{200} = \dfrac{3}{100}$.

2. **a.** Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de chaussettes défectueuses sur un tirage de 6 chaussettes. Elle suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et de probabilité $p(\text{D}) = 0,035$.

Or $p(X = 2) = \dbinom{6}{2}0,035^2(1 - 0,035)^4 = 15 \times 0,035^2 \times 0,965^4 \approx 0,015\,934 \approx 0,016$ (au millième près).

b. Cette probabilité est égale à $p(X = 0) + p(X = 1) = \dbinom{6}{0}0,035^0(1 - 0,035)^6 + \dbinom{6}{1}0,035^1(1-0,035)^5 \approx 0,807\,54 + 0,175\,734 \approx 0,983\,2 \approx 0,983$ (au millième près).

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. C$(1-\text{i})$ et D$(-\text{i})$

2. **a.** Déterminer l'écriture complexe de r. $z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}z \iff z' = \text{i}z$.

b. OBEF étant un carré, $r(B) = F$, donc $f = \text{i}b$.

c. On a $\overrightarrow{\text{O}B} = \overrightarrow{FE} \iff b = e - f \iff e = b + f = b + \text{i}b = b(1+\text{i})$.

3. OFGD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{\text{O}D} = \overrightarrow{FG} \iff d = g - f \iff g = d + f = -\text{i} + \text{i}b = \text{i}(b-1)$.

4. $\dfrac{e-g}{c-g} = \dfrac{b(1+\text{i}) - \text{i}(b-1)}{1-\text{i}-\text{i}(b-1)} = \dfrac{b+\text{i}}{1-\text{i}b} = \dfrac{(b+\text{i})(1+\text{i}b)}{(1-\text{i}b)(1+\text{i}b)} = \dfrac{\text{i}\left(b^2+1\right)}{1+b^2} = \text{i}$.

Il en résulte que $\arg\left(\dfrac{e-g}{c-g}\right) = \left(\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GE}\right) = \arg(\text{i}) = \dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** $239 = 13\times 18 + 5 \iff 239 \equiv 5 \quad (13)$

$239 = 17\times 14 + 1 \iff 239 \equiv 1 \quad (17)$

Donc 239 est solution du système.

b. $N \equiv 5 \quad (13)$ signifie : il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $N = 13y + 5$;

De même $N \equiv 1 \quad (17)$ signifie : il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $N = 17x + 1$.

Toute solution N du système peut donc s'écrire de deux façons :

$13y + 5 = 17x + 1$. Il en résulte que $17x + 1 - 13y - 5 = 0 \iff 17x - 13y = 4$, avec $x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}$.

c. Une solution évidente saute aux yeux : le couple $(1\ ;\ 1)$

On a donc le système :

$\left\{\begin{array}{lcl} 17x - 13y & = & 4 \\ 17\times 1 - 13\times 1 & = & 4 \end{array}\right. \Rightarrow$ (par différence

$17(x-1) - 13(y-1) = 0 \iff 17(x-1) = 13(y-1) \quad (1)$.

17 étant premier avec 13, il divise d'après le théorème de Gauss, $(y-1)$; il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - 1 = 17k \iff y = 17k + 1$.

En reportant dans l'équation (1), on obtient $17(x-1) = 13\times 17k \iff x - 1 = 3k \iff x = 13k + 1$.

Les couples solutions s'écrivent sous la forme $(13k+1\ ;\ 17k+1),\ k \in \mathbb{Z}$.

d. On a vu que $N = 17x + 1 = 17(13k+1) + 1 = 221k + 17 + 1 = 221k + 18$.

e. On a déjà démontré ci-dessus que $\left\{\begin{array}{lcll} N & \equiv & 5 & (13) \\ N & \equiv & 1 & (17) \end{array}\right. \Rightarrow N \equiv 18 \quad (221)$.

Inversement : $N \equiv 18 \quad (221) \iff N = 221q + 18 = 17\times 13q + 18 = 17\times 13q + 17 + 1 \iff N = 17(13q+1) + 1 \iff N \equiv 1 \quad 17$.

De même on peut écrire $N = 221q + 18 = 17\times 13q + 18 = 17\times 13q + 13 + 5 = 13(17q+1) + 5 \iff N \equiv 5 \quad [13]$.

2. **a.** La réponse est oui s'il existe un nombre N de la forme 10^k.

D'après le petit théorème de Fermat :

17 est premier et 10 est un entier non divisible par 17.

On sait qu'alors $10^{17-1} \equiv 1 \quad [17] \iff 10^{16} \equiv 1 \quad [17]$.

b. On a vu que $10^{\ell} \equiv 18 \quad [221] \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcll} 10^{\ell} & \equiv & 5 & [13] \\ 10^{\ell} & \equiv & 1 & [17] \end{array}\right.$

Or

- $10 \equiv -3 \quad [13]$
- $10^2 \equiv 9 \quad [13]$
- $10^3 \equiv -1 \quad [13]$
- $10^4 \equiv 3 \quad [13]$
- $10^5 \equiv 4 \quad [13]$
- $10^6 \equiv 1 \quad [13]$

Dans la division par 13, tous les nombres 10^{ℓ} ont donc comme reste : -3 ; -1 ; 3 ; 4 ; 9, mais jamais 5.

Conclusion : il n'existe pas d'entier ℓ tel que $10^{\ell} \equiv 18 \quad [221]$.

EXERCICE 3 **6 points**

Partie A : existence et unicité de la solution

1. f est une somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$: elle est donc dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \geqslant 1 > 0$.
   La fonction f est donc croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. On a :
   - $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$;
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   Comme la fonction f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ il existe un réel unique $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$.
3. $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \ln 2 < 0$.
   $f(1) = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1 > 0$.
   On a : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$, $f(1) > 0$ et f croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$, donc
   $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Partie B : encadrement de la solution α

1. Étude de quelques propriétés de la fonction g.
   a. g est une différence de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$; elle est donc dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{5}\left(4 - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{5}\dfrac{4x-1}{x}$ qui est du signe de $4x - 1$, donc négative sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{4}\right]$ et positive sur $\left[\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$.
   g est donc décroissante sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{4}\right]$, puis croissante.
   b. Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$, on vient de voir que g est croissante. Donc :
   $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow g\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant g(x) \leqslant g(1)$.
   Or $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2 - \ln\frac{1}{2}}{5} = \dfrac{2 + \ln 2}{5} \approx 0,53 > 0,5$ et $g(1) = \dfrac{4 - \ln 1}{5} = \dfrac{4}{5} < 1$.
   Conclusion : $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant g(x) \leqslant 1$.

c. On a (E) $: g(x) = x \iff \dfrac{4x - \ln x}{5} = x \iff 4x - \ln x = 5x \iff x + \ln x = 0 \iff f(x) = 0$.

2. **a.** Initialisation : $u_0 = \dfrac{1}{2}$, on a vu que $u_1 = g(u_0) \approx 0,53$.

Donc $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.

Hérédité : supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant 1$.

D'une part $\dfrac{1}{2} \leqslant u_p \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant g\left(u_p\right) \leqslant 1$ soit $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{p+1} \leqslant 1$.

D'autre part par croissance de la fonction g :

$u_p \leqslant u_{p+1} \Rightarrow g\left(u_p\right) \leqslant g\left(u_{p+1}\right)$, soit $u_{p+1} \leqslant u_{p+2}$.

La démonstration par récurrence est achevée.

b. On vient donc de démontrer que la suite (u_n) croissante et majorée par 1 converge vers une limite $\ell \leqslant 1$.

On a $u_{n+1} = g(u_n)$. La fonction étant continue sur $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$, la limite ℓ vérifie : $\ell = g(\ell)$ c'est-à-dire d'après la question **1. c.** vérifie $x + \ln x = 0 \iff f(x) = 0$, dont l'unique solution est α.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers α.

3. **a.** La calculatrice donne $u_{10} \approx 0,567\,124$ à 10^{-6} près.

b. On admet que :

$0,567\,124 \leqslant \alpha \leqslant u_{10} + 5 \times 10^{-4}$, soit $0,567\,124 \leqslant \alpha \leqslant 0,567\,524$.

Donc au millième près : $0,567 \leqslant \alpha \leqslant 0,568$.

EXERCICE 4 — 4 points

1. La fonction constante $x \mapsto 3$ est solution de l'équation et les solutions de l'équation $y' + 2y = 0$ sont de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{-2x}$.

Les solutions sont donc de la forme : $f(x) = K\mathrm{e}^{-2x} + 3$. Or $f(0) = 1 \iff K + 3 = 0 \iff K = -2$. Donc réponse (1).

2. G, I et A sont alignés si G est le barycentre de I et A, ou encore par associativité le barycentre de (B, 2), (C, 1) et A, donc en particulier de (B, 2), (C, 1) et (A, 1).

La bonne réponse est la (3).

3. La perpendiculaire à $\mathscr{P}$ contenant A a pour équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+1t \\ y &=& 3-3t \\ z &=& -1+2t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}$$

Le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ est donc le point commun à cette droite et à $\mathscr{P}$. Ses coordonnées vérifient donc le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+1t \\ y &=& 3-3t \\ z &=& -1+2t \\ x-3y+2z &=& 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+1t \\ y &=& 3-3t \\ z &=& -1+2t \\ 2+t-3(3-3t)+2(-1+2t) &=& 5 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+1t \\ y &=& 3-3t \\ z &=& -1+2t \\ 14t &=& 14 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3 \\ y &=& 0 \\ z &=& 1 \\ t &=& 1 \end{array}\right.$$

Réponse (3)

4. Question 4

La valeur moyenne de la fonction f est :

$m = \frac{1}{-}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{dx}$.

Cette intégrale ne peut être calculée, mais sur $[0\,;\,1]$:

$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant 1+x^2 \leqslant 2 \iff \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$.

Ces fonctions étant positives, on obtient en intégrant sur $[0\,;\,1]$:

$\int_0^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{dx} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{dx} \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{dx}$, soit $\frac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1$.

Or $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, donc la seule réponse possible est la réponse (2).